Title	單葉函數ニ就イテ
Author(s)	城, 憲三
Citation	全国紙上数学談話会. 74 p.1-p.5
Issue Date	1936-01-18
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74244
rights	
Note	

321. 單葉函數ニ就イテ

城　憲三（阪大工）

$\boxed{1}$ $f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<1$ ニ於ケル正則單葉函數トシ,

Nevanlinna 變換:

$$(1)\quad h(\zeta)=\frac{-f\left(\frac{-\zeta+z_1}{1-\bar{z}_1\zeta}\right)+f(z_1)}{f'(z_1)(1-|z_1|^2)}=\zeta+\cdots\cdots$$

ヲ考ヘルト, $h(\zeta)$ ハ $|\zeta|<1$ デ正則單葉デアル. $z_2=\frac{-\zeta+z_1}{1-\bar{z}_1\zeta}$ トオケバ $|z_2|<1$ デアッテ

$$(2)\quad \zeta=\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}$$

トナル。(1), (2) ヨリ

$$(3)\quad \frac{h(\zeta)}{\zeta}=\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f'(z_1)(1-|z_1|^2)}\cdot\frac{1-\bar{z}_1z_2}{z_1-z_2}$$

而シテ Grunsky ノ第一定理（Dissertation 參照）ヨリ

$$(4)\quad \left|\log\frac{h(\zeta)}{\zeta}+\log(1-|\zeta|^2)\right|\leqq\log\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}$$

デアルカラ, (4) ニ (3) ヲ代入シテ次ノ主要定理ガ得ラレル。

$$(5)\quad \left|\log\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\cdot\frac{1-\bar{z}_1z_2}{f'(z_1)(1-|z_1|^2)}+\log\left(1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|^2\right)\right|$$

$$\leqq \log \frac{1+\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}.^{*)}$$

(5)ハ従来単葉函數論ニ知ラレテヰル非常ニ多クノ定理ヲ含ンデヰル。面白イカラ導キ出シテ見ヨウ。

I. $z_1=0,\ z_2=z_0$ トオケバ

定理 1. $$\left|\log\frac{f(z_0)}{z_0}+\log(1-|z_0|^2)\right|\leqq\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}.$$

II $z_2=0,\ z_1=z_0$ トオケバ

$$\left|\log\frac{f(z_0)}{z_0}\cdot\frac{1}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}+\log(1-|z_0|^2)\right|\leqq\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|},$$

或ハ

定理 2. $$\left|\log\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right|\leqq\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|},$$ (Grunsky ノ第二定理)

系 $$\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}\leqq\left|\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right|\leqq\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|},$$ (Nevanlinna ノ定理)

III. (5)ノ左辺ノ絶對値記号内ノ實數部分ノミヲ考ヘルト,

定理 3. $$\left(\frac{1-|z_1|}{1+|z_1|}\right)^2\cdot\frac{|1-\bar{z}_1 z_2|}{(|1-\bar{z}_1 z_2|+|z_1-z_2|)^2}\leqq\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|$$

---

*) $\log\dfrac{1+\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}\equiv D(z_1,z_2)$ ハ $z_1,\ z_2$ 二点間ノ Non-Euclidean distance ヲ表ハスカラ，モ少シ幾何學的ナ意見ヅケヲシタイ様ナ氣ガスル。(G. Julia, Principes géometriques d'analyse I, p. 39 參照)

$$\leqq \left(\frac{1+|z_1|}{1-|z_1|}\right)^2 \cdot \frac{|1-\bar{z}_1 z_2|}{(|1-\bar{z}_1 z_2|-|z_1-z_2|)^2} \quad (\text{Szegö ノ定理})$$

上ノ定理ニ於テ $z_1=0$, $z_2=z_0$ トオケバ

系1. $$\frac{1}{(1+|z_0|)^2} \leqq \left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| \leqq \frac{1}{(1-|z_0|)^2}, \quad (\text{Bieberbach ノ定理})$$

又 $z_2 \to z_1$ ナル極限ヲ考ヘ $z_1=z_0$ ト書ケバ

系2. $$\frac{1-|z_0|}{(1+|z_0|)^3} \leqq |f'(z_0)| \leqq \frac{1+|z_0|}{(1-|z_0|)^3}. \quad (\text{Bieberbach ノ定理})$$

IV. (5) ノ左辺ノ絶對値記号内ノ虚数部分ノミヲ考ヘルト;

定理4. $$\left|\arg\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}-\arg f'(z_1)\right| \leqq \log\frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}+\arg(1-\bar{z}_1 z_2)$$

$z_1=0$, $z_2=z_0$ トオケバ

系1. $$\left|\arg\frac{f(z_0)}{z_0}\right| \leqq \log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}.$$

$z_2=0$, $z_1=z_0$ トオケバ

系2. $$\left|\arg\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right| \leqq \log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$$

(注意) 系1, 系2 ハ夫々定理1, 定理2カラモ出ル。

系3. $$\left|\arg\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \leqq \log\frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}+\arg(1-\bar{z}_1 z_2) + |\arg f'(z_1)|$$

他ノ拙論デ述ベタ様ニ

定理5. $$|\arg f'(z_1)| \leqq 2|a_2|r+\frac{3}{2}r\log\frac{1+r}{1-r}\cdot\Theta,$$

$$r=|z_1|,\ 0<\Theta<1$$

デアルカラ

系3′. $$\left|\arg\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \leqq \log\frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}+\arg(1-\bar{z}_1 z_2)$$

$$+2|a_2|r+\frac{3}{2}r\log\frac{1+r}{1-r}\,\Theta, \quad (r=|z_1|).$$

系3′ハ定理5ノ擴張デアル。($z_2 \to z_1$ ヲ考フレバ)

以上ニヨツテ従來未知デアツタ $\log\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}$ ノ Wertbereich ガ大体分ツタコトニナル。$|\zeta|>1$ デ normieren シタ單葉寫像函數 $\varphi(\zeta)$ ニ對シテ, $\log\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{z_1-z_2}$ ノ Wertbereich ハ Grötzsch ニヨツテ完全ニ研究サレテアツタ。(Grötzsch, Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig, 84 (1932), 269–278)

$\boxed{2}$ Rengel ノ Dissertation 中ノ Satz IV カラ Bloch 常數ノ値ノ評價ニ關シ注意シタコトガアリ, Robinson ノ論文ニアルコトノ直接的ナ説明ヲシタコトガアルガ,

モ一ツ同ジ Dissertation 中ノ Satz X トシテ次ノコトガ掲ゲテアル。(K_0 ハ單位円: $|z|<1$ ヲ表ハストス.)

$w=f(z)$ bilde K_0 schlicht normiert so ab, daß in der w-Ebene ∞ von 0 aus auf keinem Halbstrahl durch 0 erreichbar ist, ohne den Bildrand γ zu treffen. Die Entwicklung in 0 sei

$$f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+a_{2n+1}z^{2n+1}+\cdots\cdots+a_{\nu n+1}z^{\nu n+1}+\cdots\cdots$$

mit reellen Koeffizienten. Dann gilt

$$(6)\qquad |a_{n+1}| \leqq \frac{2}{n},$$

$$(7)\quad a_{2n+1} \geqq \frac{n+1}{2} a_{n+1}^2 - \frac{1}{n}.$$

(7) ハ Rogosinski ノ一定理ノ擴張ニナツテキル。**)

ココニ注意シタイコトハ，係數ガ一般ニ<u>複素數</u>デアツテモ (6) ハ成立スルコト勿論ニシテ（明ラカナルガ故ニ説明省略），(7) ハ次ノ様ニ擴張出來ル。

$$(8)\quad \left| \frac{n+1}{2} a_{n+1}^2 - a_{2n+1} \right| \leqq \frac{1}{n}.$$

(8) ハ可成リノ應用性ヲ有スルモノト信ズル、事實 $n=1$ ナルトキニ成立スル，$|a_2^2 - a_3| \leqq 1$ ナル不等式ハ尚未知ノ事實ヲ解決スル能力ヲ有スル。

(8) ノ証明ハ簡單デアル。K. Löwner ノ定理ニヨリ

$$a_{n+1} = -\frac{2}{n}\int_0^\infty K(\tau) e^{-\tau} d\tau,$$

$$a_{2n+1} = 2\frac{n+1}{n^2}\left[\int_0^\infty K(\tau) e^{-\tau} d\tau\right]^2 - \frac{2}{n}\int_0^\infty K^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau, \quad |K(\tau)| = 1$$

デアルカラ

$$(9)\quad \frac{n+1}{2} a_{n+1}^2 - a_{2n+1} = \frac{2}{n}\int_0^\infty K^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau.$$

$|K(\tau)| = 1$ デアルカラ上式ヨリ (8) ガ得ラレル。

——（以 上）——

**) Rogosinski ノ定理

$S_u(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^3 + \cdots\cdots$ ヲ $|z|<1$ デ正則單葉トシ係数ハ全部實數デアルトスレバ

$$a_5 \geqq -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} a_3^2 \geqq -\frac{1}{2}.$$

Math. Zeitschr. 35 (1932), S. 121 參照.